Vektorianalyysi

Niklas Halonen, Alma Nevalainen

November 5, 2025

Tämä dokumentti on eräänlainen luuranko Olli Martion kirjasta *Vektorianalyysi* (saatavilla avoimesti Helsingin Yliopiston Helda-palvelusta). Dokumentin tarkoitus on parantaa sekä korjata Martion kirjassa ilmenevät virheet että lisätä puuttuvia määritelmiä, jotta kokonaisuus olisi tarpeeksi täsmällinen että sen voisi *formalisoida*. Dokumentin sekaan on kirjoitettu Sauli Lindbergin Vektorianalyysi II kurssin luentomonisteesta hyödyllisiä tuloksia.

Dokumentti on tehty Leanblueprint-työkalulla, joka mahdollistaa isojen formalisointiprojektien koordinoinnin. Dokumentin tarkoitus ei tällä hetkellä ole kuitenkaan formalisoida Martion kirjan tuloksia Lean-todistusassistentilla.

Dokumentin verkkoversion vasemmasta reunasta löytyy *Dependency graph* joka vie interaktiiviseen verkkomuotoiseen esitykseen dokumentin määritelmistä ja lauseista.

Lisäksi jokaisen kappaleena alta löytyy *muuttujia* jotka otetaan kyseisen kappaleen loppuun asti universaalisti kvantifioituna.

Chapter 1

Euklidinen avaruus $\mathbb{R}^n$

Definition 1.1 (Reuna)**.** *Olkoon* $A \subset \mathbb{R}^n$ *joukko. Joukon* A reuna ∂A *on joukko*

$$\partial A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall r > 0, B(x,r) \cap A \neq \emptyset \wedge B(x,r) \cap A^c \neq \emptyset\}$$

Example 1.2. *r-säteisen x_0-keskeisen arvoimen kuulan reuna* $\partial B(x_0, r) = \{y \mid |y - x_0| = r\}$.

Definition 1.3 (Sulkeuma)**.** *Joukon* A sulkeuma *on* $\overline{A} = A \cup \partial A$*.*

Theorem 1.4 (Harjoitustehtävä 1.3:1)**.** *Olkoon* $A \subset \mathbb{R}^n$*. Tällöin*

- ∂A *on suljettu ja*
- $\overline{A}$ *on suljettu.*

Chapter 2

Reaaliarvoiset funktiot

Chapter 3

Vektoriarvoiset funktiot

Chapter 4

Integrointi tasossa

Variable 4.1. *Olkoon X joukko, ja d X:n metriikka. Nyt (X, d) on metrinen avaruus ja täten sillä on metriikan indusoima topologia.*

Definition 4.2 (Sisäpiste)**.** *Olkoon $A \subset X$.*
Piste x on joukon A sisäpiste*, jos*

$$\exists r > 0, B_d(x, r) \subset A$$

missä $B_d(x, r)$ on metrisen avaruuden (X, d) avoin r-säteinen x-keskeinen kuula.

Definition 4.3 (Sisäjoukko (sisus))**.** *Olkoon $A \subset X$.*
A:n sisäjoukko *$int A$ on A:n sisäpisteiden joukko.*

Definition 4.4 (Pistevieras)**.** *Joukot $C_i \subset \mathbb{R}$ ovat* pistevieraita *jos leikkausjoukot $\mathbb{C}_i \cap C_j = \emptyset$ kaikilla $i \neq j$, lukuunottamatta äärellistä määrää "kulmapisteitä".*
Huom: tämä kurssin käyttämä määritelmä on epäpätevä, ks. määritelmä 4.6

Variable 4.5. *Olkoon $C_i \subset X$ numeroituva jono X osajoukkoja.*

Definition 4.6 (Reunavieras)**.** *Joukot C_i (muuttujasta 4.5) ovat* reunavieraita *jos leikkausjoukot $int C_i \cap int C_j = \emptyset$ kaikilla $i \neq j$.*

Remark 4.7. *Määritelmä 4.6 on yleistys kurssin määritelmästä 4.4, sillä pistevierautta käytetään kurssilla vain $\mathbb{R}^1$ osajoukoista (joiden reuna koostuu $\mathbb{R}^1$ pisteistä).*

Theorem 4.8 (Reunavieras (vaihtoehtoinen määritelmä))**.** *Joukot C_i ovat* reunavieraita *jos ja vain jos $C_i \cap C_j \subset \partial C_i \cup \partial C_j$ kaikilla $i \neq j$.*

Definition 4.9 (Joukon peite)**.** *Olkoon S joukko.*
Perhe $P \subset \mathcal{P}(S)$ on joukon S peite*, jos se koostuu S:n osajoukoista, jotka yhdessä sisältävät kaikki S alkiot. Täsmällisemmin,*

$$\bigcup_{p \in P} p = s.$$

Definition 4.10 (Joukon ositus)**.** *Olkoon S joukko.*
Peite P on joukon S ositus*, jos se koostuu epätyhjistä erillisistä joukoista. Täsmällisemmin,*

- $\emptyset \notin P$
- $p_1 \cap p_2 = \emptyset$ *kaikilla eri* $p_1, p_2 \in P$.

Definition 4.11 (Reunavieras ositus)**.** *Olkoon* $S \subset X$.
S numeroituva peite C_i *on* S reunavieras ositus, *jos* C_i *on reunavieras, ja lisäksi* $C_i \neq \emptyset$.

Theorem 4.12 (Ositus on reunavieras ositus)**.**

Proof. Osituksen joukot ovat erillisiä, joten ne ovat reunavieraita. □

4.1 Integraalin määrittely suorakaiteen yli

Definition 4.13 (Suorakaiteen ositus)**.** *Olkoon* $n, m \in \mathbb{N}_1$ *ja* $D = [a,b] \times [c,d]$.
Suorakaiteen D ositus eli jako $\{R_{ij}\}_{1\le i\le m, 1\le j\le n}$ *muodostuu välien* $[a,b]$ *ja* $[c,d]$ *osituksista:* $a = x_0 < \cdots < x_m = b$, $c = y_0 < \cdots < y_n = d$, *missä suorakaiteet* $R_{ij} = [x_{(i-1)}, x_i] \times [y_{(j-1)}, y_j]$ *muodostavat joukon* D *reunavieraan osituksen.*

Remark 4.14. *Huomaa, että jos* $\{R_{ij}\}$ *on ositus, niin* R_{ij} *on suorakaide, ja ei ole ositus, toisin kuin kurssikirjassa on käytäntönä.*
Tästedes eroamme kurssikirjasta käyttämällä R_{ij} *sijaan* $\{R_{ij}\}$ *kun kyseessä on ositus.*

Theorem 4.15 (Suorakaiteen ositus on reunavieras ositus)**.**

Proof. Ilman yleistyksen menetystä $R_{ij} = [x_{(i-1)}, x_i] \times [y_{(j-1)}, y_j]$ leikkaa ainoastaan sellaisia R_{kl}, missä $k = i+1$ tai $l = j+1$.
Huomataan, että $\operatorname{int} R_{ij} = (x_{(i-1)}, x_i) \times (y_{(j-1)}, y_j)$, joten selvästi $\operatorname{int} R_{ij} \cap \operatorname{int} R_{kl} = \emptyset$. □

Definition 4.16 (Suorakaiteen pinta-ala)**.** *Olkoon* $a \le b$ *ja* $c \le d$. *Suorakaiteen* $R = [a,b] \times [c,d]$ pinta-ala $\Delta R := (b-a)(d-c)$.

Definition 4.17 (Suorakaiteen läpimitta)**.** *Olkoon* $a \le b$ *ja* $c \le d$. *Suorakaiteen* $R = [a,b] \times [c,d]$ läpimitta $d(R) = \left((b-a)^2 + (d-c)^2\right)^{1/2}$.

Definition 4.18 (Jaon normi)**.** *Olkoon* $\{R_{ij}\}$ *suorakaiteen* D *ositus.*
Jaon normilla $\|\{R_{ij}\}\|$ *tarkoitetaan suorakaiteiden* R_{ij} *suurinta läpimittaa, eli*

$$\|\{R_{ij}\}\| := \max_{i,j} d(R_{ij}).$$

Variable 4.19. *Olkoon* D *suorakaide ja* $f : D \to \mathbb{R}$ *rajoitettu.*

Definition 4.20 (Riemannin summa)**.** *Olkoon* $\{R_{ij}\}_{1\le i\le m, 1\le j\le n}$ *suorakaiteen* D *ositus ja* $\{\xi_{ij}\}$ *siten, että* $\xi_{ij} \in R_{ij}$ *kaikilla* i *ja* j.
Funktion f Riemannin summa

$$R(f, \{R_{ij}\}, \{\xi_{ij}\}) = \sum_{i,j} f(\xi_{ij}) \Delta(R_{ij}).$$

Definition 4.21 (Riemann-integroituva)**.** *Rajoitettu funktio* f *on* Riemann-integroituva *suorakaiteen* D *yli, jos on olemassa* $I \in \mathbb{R}$ *siten että kaikilla* $\epsilon > 0$ *on olemassa* $\delta > 0$ *siten että kaikilla* $m, n \in \mathbb{N}_1$ *ja* $\{R_{ij}\}_{1\le i\le m, 1\le j\le n}$ *joille* $\|\{R_{ij}\}\| < \delta$, *niin kaikilla* $\{\xi_{ij}\}_{1\le i\le m, 1\le j\le n}$ *joille* $\xi_{ij} \in R_{ij}$ *kaikilla* i, j, *pätee* $|R(f, \{R_{i,j}\}, \{\xi_{i,j}\})| < \epsilon$.

Remark 4.22. *Kurssin määritelmässä 4.1.1 Riemann-integroituvuudesta on ξ jätetty tahallaan kvantifioimatta, joka aiheuttaa vaikeuden tulkita määritelmä oikein.*

Määritelmä 4.21 vastaa kurssin määritelmää, kunhan tulkitaan, että $\{\xi_{ij}\}$ kvantifioidaan (universaalisti) vasta $\{R_{ij}\}$ kvantifioinnin jälkeen. Tämä tulkinta ei ole yksiselitteinen, koska Riemannin summan määritelmä ei eksplisiittisesti vaadi $\{\xi_{ij}\}$ riippuvan osituksesta $\{R_{ij}\}$. Lisäksi määritelmästä 4.1.1 ei ole selvää kvantifioidaanko $\{\xi_{ij}\}$ universaalisti vai eksistentiaalisti.

Normaalisti matematiikassa implisiittiset parametrit sidotaan universaalisti lauseen tai määritelmän ylätasolla, mutta tämä johtaa väärään tulkintaan määritelmän 4.1.1 kohdalla.

4.2 Integrointi yleisten joukkojen yli

Definition 4.23 (Nollajoukko)**.** *Joukko $N \subseteq \mathbb{R}^2$ on* nollajoukko *jos jokaiselle $\epsilon > 0$ on olemassa (mahdollisesti äärellinen) jono suorakaiteita $R_i = [a_i, b_i] \times [c_i, d_i]$ jotka peittävät N siten että*

$$\sum_i area(R_i) < \epsilon.$$

Definition 4.24 (Kompakti)**.** *Joukko $A \subseteq \mathbb{R}^n$ on* kompakti*, jos jokaisella jonolla (x_i), missä $x_i \in A$ kaikilla i, on sellainen suppeneva osajono (x_{i_j}) että $\lim_{j\to\infty} x_{i_j} \in A$.*

Definition 4.25 (Suljettu)**.** *Joukko $A \subseteq \mathbb{R}^n$ on* suljettu*, jos jokaisella suppenevalla jonolla (x_i), missä $x_i \in A$ kaikilla i, pätee $\lim_{i\to\infty} x_i \in A$.*

Theorem 4.26 (Heine-Borel)**.** *Joukko $A \subseteq \mathbb{R}^n$ on kompakti jos ja vain jos se on rajoitettu ja suljettu.*

Example 4.27 (Pohdintatehtävä)**.** *Olkoot $g_1, g_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ jatkuvia ja $g_1 \leq g_2$. Osoita, että*

$$A = \{(x, y) \mid g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

on kompakti.

Proof. Osoitetaan, että A on suljettu. Olkoon (s_i) suppeneva jono A pisteitä.

$$\vdash \lim_{i\to\infty} s_i \in A.$$

Nimetään suppeneva piste (x, y)

$$\vdash \lim_{i\to\infty} s_i = (x, y)$$

Riittää osoittaa komponenttifunktioiden suppeneminen

$$s_i = (x_i, y_i)$$
$$\vdash \lim_{i\to\infty} x_i = x \wedge \lim_{i\to\infty} y_i = y$$

Huomataan, että $\{x_1 \mid x \in A\} = [a, b]$, sillä kaikilla x on olemassa y siten että $g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$. Sillä $[a, b]$ on suljettu ja (x_i) suppenee, niin ensimmäinen konjunktion jäsen on totta.

$$\vdash \lim_{i\to\infty} y_i = y$$

Sillä g_1 jva, niin $g_1(x) = \lim_{i\to\infty} g_1(x_i)$. Vastaavasti $g_2(x) = \lim_{i\to\infty} g_2(x_i)$. Nyt, koska $\lim_{i\to\infty} y_i = y$

$$g_1(x) = \lim_{i\to\infty} g_1(x_i) \le \lim_{i\to\infty} y_i = y = \lim_{i\to\infty} y_i \le \lim_{i\to\infty} g_2(x_i) = g_2(x)$$

Täten $(x, y) \in A$. □

Theorem 4.28 (Tyhjä joukko on nollajoukko)**.**

Proof. □

Theorem 4.29 (Integraalin additiivisuus)**.**

4.3 Epäoleelliset integraalit

Remark 4.30. *Palautetaan mieleen 1. ulottuvuuden tapaus. Jos $f : (0,1] \to \mathbb{R}$ ja se on integroituva jokaisella välillä $[t, 1]$ kun $0 < t < 1$.*

$$\int_0^1 f(x)dx = \lim_{t->0+} \int_t^1 f(x)dx$$

Kutsutaan tällaista epäoleelliseksi integraaliksi

4.4 Muuttujan vaihto integraaleissa